Berechnung von Hochfrequenzverstärkerschaltungen mit relativ engem Durchlaßband.

(„Rundfunksiebschaltungen".)

Von

W. CAUER †.

Mit 4 Textabbildungen.

(Eingegangen 20. Mai 1950.)

1. Einleitung.

Die hier betrachtete Klasse von Verstärkerschaltungen wird gewöhnlich mit dem Schlagwort „Rundfunksiebschaltungen" bezeichnet. Das Wesentliche ist dabei die Geeignetheit für Verstärker mit relativ engem Übertragungsband $\omega_{-\varkappa} \leq \omega \leq \omega_{\varkappa}$, d. h. für den Fall

$$\vartheta = \frac{b}{2\,\omega_0} \ll 1, \quad b = \omega_{\varkappa} - \omega_{-\varkappa}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\omega_{-\varkappa}\,\omega_{\varkappa}} \tag{1}$$

nicht die besondere Anwendung für Rundfunkzwecke. Es handelt sich um Verstärkerschaltungen, bei denen zwei aufeinanderfolgende Röhren durch eine koppelnde Vierpolschaltung nach Bild 1 verbunden sind, worin die Querleitwerte von der in Bild 2a dargestellten Form eines gedämpften Schwingkreises und die Längsleitwerte Kondensatoren oder Spulen sind (Bild 2b oder c). Liegt nur der letzte Fall vor, so wird auch die praktisch vorteilhaftere äquivalente oder näherungsweise äquivalente (vgl. die spätere Erläuterung) Schaltung Bild 3 in den Kreis unserer Betrachtungen gezogen, bei der jeder Schwingkreis mit dem vorhergehenden und folgenden induktiv verkoppelt ist. Liegt bei der Schaltung Bild 1 sowohl der Fall Bild 2b wie auch der des Bild 2c vor, so gelangt man sinngemäß zu einer ähnlichen Schaltung, die eine Kombination von den Schaltungen Bild 1 und 3 darstellt. Für die Schaltung Bild 3 und die Schaltung Bild 1 mit $Y_{s,\,s+1}$ nach Bild 2b ist die Bedingung erfüllt, daß jede Spule parallel mit einem Kondensator vorkommt. Ferner ist die weitere Bedingung erfüllt, daß die Anodenkathodenkapazität der vorhergehenden Röhre in C_1 und die Gitterkathodenkapazität der folgenden Röhre

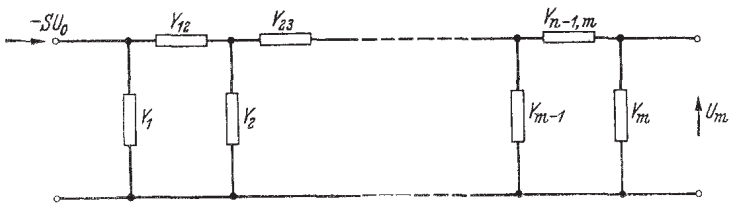

Bild 1.

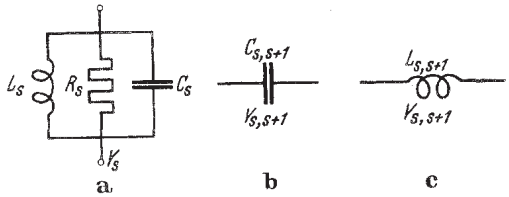

Bild 2.

in C_m einbegriffen sein kann. Schließlich liegt parallel mit jeder Spule ein Verlustwiderstand. Diese Eigenschaften machen die angeführten Kopplungsvierpole für Hochfrequenzverstärkerzwecke geeignet. Die genannten Schaltungen werden, wie wir voraussetzen wollen, nur in Fällen angewandt, wo nur Frequenzen ω „in der Nachbarschaft" von einer festen Frequenz ω_0 $\left[\frac{|\omega-\omega_0|}{\omega_0}\right] \ll 1$; vgl. (1) betrachtet werden und die Verluste $\left[\text{„Verlustwinkel"}\ \delta_s = (R_s C_s \omega_s')^{-1},\ \omega_s' = \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}}\right]$ der einzelnen Schwingkreise relativ gering sind ($\delta_s \ll 1$). In solchen Fällen kann im Sinne der im folgenden benutzten Näherung der große zur Spule parallel liegende Widerstand auch durch einen kleinen mit ihr in Reihe liegenden frequenzunabhängigen Ohmschen Widerstand ersetzt werden (vgl. S. 2 des Aufsatzes „Schwingkreisgekoppelte Verstärker mit vorgeschriebenem Amplitudengang", im folgenden als „S. V. m. v. A." zitiert). Das Frequenzverhalten eines Verstärkers der beschriebenen Art ist völlig bestimmt, wenn die (komplexe) Verstärkung V' jeder Stufe[1] als Funktion der Kreisfrequenz $\omega = i\lambda$ bekannt ist. Ist U_0 die Gitterspannung, S die Steilheit der vorhergehenden Penthode (unendlich großer Innenwiderstand), U_m die Gitterspannung der folgenden Röhre (vgl. Bild 1), so hat die Verstärkung der Stufe den Wert

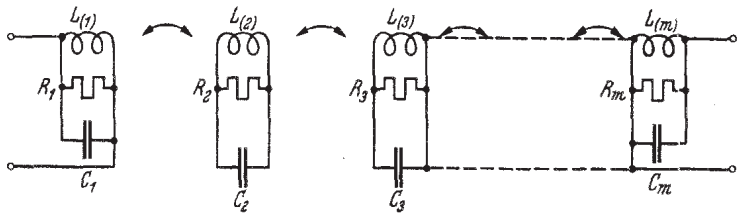

Bild 3.

$$V'(\lambda) = \frac{U_m}{U_0}. \tag{2}$$

Verschiedene Stufen können verschiedenes V' besitzen.

Wir beschränken uns auf den für die Anwendungen wichtigsten Fall der „näherungsweisen" Frequenzsymmetrie. Von „Frequenzsymmetrie" bezüglich einer mittleren Frequenz ω_0 wird gesprochen, wenn der Verstärkungsbetrag der Bedingung $\left|V'\left(\frac{i\omega_0^2}{\omega}\right)\right| = |V'(i\omega)|$ genügt, welche die auch die Phase enthaltende allgemeinere Beziehung der Frequenzsymmetrie

$$V'\left|\frac{\omega_0^2}{\lambda}\right| = V'(\lambda)$$

nach sich zieht. Wegen $V'(-i\omega) = \overline{V'(i\omega)}$ bedeutet dies bei der durch $V' = |V'| \cdot e^{-iB}$ gegebenen Definition der Phase B, daß diese für zwei Frequenzen ω und ω', die der Bedingung $\omega\omega' = \omega_0^2$ genügen, entgegengesetzt gleiche Werte annimmt. In dem Fall $m = 1$ für jede Stufe, d. h. bei einem durch einfache gedämpfte Schwingkreise oder „eingliedrig gekoppelten" Verstärker läßt sich ohne die Einschränkung Gl. (1) zeigen, daß jede im Nutzband $(\omega_{-\infty}, \omega_\infty)$, stetige Funktion $f(\omega)$, welche die Bedingung

$$f\left(\frac{\omega_0^2}{\omega}\right) = f(\omega) \tag{3}$$

erfüllt, für das Nutzfrequenzband beliebig genau durch den Betrag der Gesamtverstärkung

$$V = V_1' V_2' \cdots V_n' \tag{4}$$

eines n-stufigen Verstärkers mit hinreichend großem n angenähert werden kann, sofern V^{-1} von der besonderen frequenzsymmetrischen Form

$$V^{-1} = (-1)^n g(\Lambda),\ \Lambda = \frac{\lambda^2 + \omega_0^2}{b\lambda} \tag{5}$$

ist, wobei $g(\Lambda)$ ein geeignetes „HURWITZsches Polynom" (d. h. Polynom mit positiven Koeffizienten, dessen Nullstellen im Innern der linken Λ-Halbebene liegen) n-ten Grades bedeutet.

[1] Der Strich dient hier zur Unterscheidung der Verstärkung einer Stufe V' von der Gesamtverstärkung V und bedeutet nicht die Ableitung.

Jedes HURWITZsche Polynom $g(\Lambda)$ führt zu einer frequenzsymmetrischen Verstärkerschaltung mit eingliedriger Schwingkreiskopplung (vgl. S. V. m. v. A.). Es wird sich herausstellen, daß wir dasselbe durch $g(\Lambda)$ bestimmte Verhalten angenähert auch durch eine „Rundfunksiebschaltung" mit mehrgliedrigen Koppelschaltungen erreichen können, wobei die Zahl der Verstärkerstufen (Röhrenzahl) noch willkürlich vorgeschrieben werden darf.

Der Umstand, daß es darauf ankommt, dem Verhältnis Ausgangsleerlaufspannung zu Eingangsstrom $-V'/S$ eines Kopplungsvierpols ein vorgeschriebenes Frequenzverhalten zu geben und die durch die Forderung des relativ sehr engen Durchlaßbandes von vornherein erforderliche Berücksichtigung der Ohmschen Verluste machen neben der Besonderheit der Schaltungsstruktur eine von dem gewöhnlich auf der Grundlage der Betriebsdämpfung berechneten Reaktanzfiltern der Trägerfrequenztechnik verschiedene Behandlung der „Rundfunksiebschaltungen" erforderlich. Bei diesen können nicht wie bei jenen „Dämpfungspole" für endliche positive Frequenzen auftreten. Allerdings ist es möglich, jeder frequenzsymmetrischen Koppelschaltung der erwähnten Art ein Reaktanzfilter so zuzuordnen, daß dessen Betriebsübertragungsfaktor mit dem Übertragungsfaktor V'^{-1} der ersteren nach Betrag und Phase übereinstimmt (vgl. S. V. m. v. A.). Während historisch z. B. nach Arbeiten von K. W. WAGGNER, RIEGER und BACKHAUS[1] der Eindruck entstehen könnte, es handele sich bei den verschiedenen Methoden zur Filterberechnung um verschiedene mehr oder weniger zweckmäßige oder richtige Berechnungsweisen für dieselbe Fragestellung, scheint nach dem neueren technischen Schrifttum, wo der Unterschied der Fragestellungen klar erkannt wird[2], bei der Behandlung der „Rundfunksiebschaltungen" kein vernünftiger Zusammenhang mit der allgemeinen Theorie der linearen Wechselstromschaltungen[3] zu bestehen.

Der vorliegende Aufsatz gibt erstmals eine systematische Behandlung solcher Hochfrequenzverstärkerschaltungen, die sich in die allgemeine Theorie der linearen Wechselstromschaltungen einordnet, und vermeidet die in dem technischen Schrifttum häufig zu findenden unzweckmäßigen Normierungen und ungenaue, in der Allgemeinheit überflüssig beschränkte Herleitungen richtiger Ergebnisse und beantwortet vor allem die wichtige Frage: Was für Frequenzabhängigkeiten können mit den betrachteten Schaltungsklassen unter den erwähnten Bedingungen realisiert werden? Die rein praktischen Ergebnisse, die Rezepte zur Schaltungsberechnung reichen allerdings nicht über den Fall $m = 3$ hinaus, wenn sie auch z. B. sämtliche von FELDTKELLER[2] behandelte Fälle mit umfassen.

2. Aufgabenstellung.

Es liegt nahe, die Forderung der Frequenzsymmetrie, die in dem Fall der eingliedrig gekoppelten Verstärker für die V'_ν im allgemeinen nicht zu gelten braucht, für die Verstärkung einer Stufe zu stellen, sofern die Gliedzahl m der Koppelschaltung Bild 1 größer als 1 ist („mehrgliedrige Kopplung"). Während im Fall der eingliedigen Kopplung allgemein für einen n-stufigen Verstärker

$$V = \frac{(-\lambda)^n}{g_{2n}(\lambda)} \tag{6}$$

gilt, wo g_{2n} ein beliebiges HURWITZsches Polynom $2n$-ten Grades sein kann, gilt im Fall einer m-gliedrigen Kopplung [vgl. Gl. (17)]

$$(Y_{12} Y_{23} \cdots Y_{m-1,\,m})^{-1} V' = \frac{-\lambda^m}{g_{2m}(\lambda)}, \tag{7}$$

wo g_{2m} immer ein HURWITZsches Polynom $2m$-ten Grades ist. Ob und welche Einschränkungen für derartige g_{2m} erforderlich sind, damit eine realisierende Schaltung nach Bild 1 existiert,

[1] K. W. WAGNER: Arch. Elektrotechn. Bd. III (1915) S. 315 und Bd. 8 (1919) S. 61. Telefunken-Ztg. Bd. 6 (1924) S. 21. — H. RIEGGER: Über Kettenleiter, W. V. Siemens Bd. 1 (3) (1921) S. 126; W. V. Siemens Bd. 3 (1) (1923) S. 190. — H. BACKHAUS: Theorie der kurzen Siebketten. H. u. E. Bd. 24 (1924) S. 11. — H. BACKHAUS, Über Siebketten und deren Anschluß an Leitungen. W. V. Siemens 3 (2), 101, 1924. H. BACKHAUS: Über Siebketten. W. V. Siemens Bd. 4 (1) (1925) S. 33.

[2] R. FELDTKELLER: Rundfunksiebschaltungen. 2. Aufl. Leipzig: S. Hirzel 1944.

[3] W. CAUER: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. Leipzig: Akadem. Verl.-Ges. 1941.

wurde nicht allgemein untersucht. Das eine Phasenumkehr bedeutende Minuszeichen rechts kann sich bei einer Schaltung nach Art des Bildes 3 und passendem Kopplungssinn der induktiven Kopplungen in ein Pluszeichen verwandeln. Nach Gl. (7) wäre eine strenge Darstellung von V'^{-1} in der Form Gl. (6) mit m statt n höchstens bei ungeradem m möglich, falls der besondere Fall

$$Y_{12}\,Y_{23}\cdots Y_{m-1,\,m} = \text{konst}\ (>0) \tag{8}$$

vorliegt. Wir wollen daher nur die entsprechende Forderung der näherungsweisen Frequenzsymmetrie stellen, daß

$$V'^{-1}_{(\lambda)} \approx A\cdot g(\Lambda) \text{ mit } g(\Lambda) = \Lambda^m + a_1\,\Lambda^{m-1} + a_2\,\Lambda^{m-2} + \cdots am,\ \ \Lambda = \frac{\lambda^2+\omega_0^2}{\lambda} \tag{9}$$

wird. Das Zeichen „näherungsweise gleich" $\approx$ in Gl. (9) erhält einen exakten Sinn dadurch, daß wir unter Benutzung des durch Gl. (1) erklärten Maßes ϑ der relativen Breite des Nutzbandes beiderseits in Gl. (9) die neue Frequenzvariable

$$\mu = \frac{2\,(\lambda - i\,\omega_0)}{b} \tag{10}$$

einführen, die mit der alten λ ganz linear zusammenhängt und dann unter Beachtung der Beziehungen

$$\frac{\lambda}{\omega_0} = i + \vartheta\,\mu\,, \qquad \Lambda = \mu - \frac{\vartheta\,\mu^2}{2\,(i+\vartheta\,\mu)} \tag{11}$$

beide Seiten von Gl. (9) nach steigenden Potenzen von ϑ entwickeln. Die Forderung Gl. (9) soll dann genauer heißen, daß Glieder mit der niedrigsten Potenz von ϑ beiderseits übereinstimmen sollen. Da die a_ν als von ϑ unabhängig angesehen werden, ist die niedrigste Potenz von ϑ in $g(\Lambda)$ die nullte und hat den Wert $g(\mu)$. Nimmt man an, daß die C_s von ϑ unabhängig sind (z. B. C_1 und C_m Röhrenkapazitäten), so erweist sich die gestellte Forderung nur dann als erfüllbar, wenn die hinsichtlich μ konstante Größe A von der Form

$$A = a\ \vartheta + \left((\vartheta^2)\right), \tag{12}$$

die Resonanzfrequenzen

$$\omega_s' = \frac{1}{\sqrt{L_s\,C_s}}$$

von der Form

$$\omega_s'^2 = \omega_0^2\ [1 + u_s'\,\vartheta + \left((\vartheta^2)\right)], \tag{13}$$

die Verlustwinkel $\delta_s = (R_s\,C_s\,\omega_s')^{-1}$ von der Form

$$\delta_s = v_s\,\vartheta + \left((\vartheta^2)\right) \tag{14}$$

und die Kopplungskoeffizienten

$$\frac{-C_{s,\,s+1}}{\sqrt{C_s\,C_{s+1}}} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\sqrt{L_s\,L_{s+1}}}{L_{s,s+1}}$$

von der Form

$$\frac{-C_{s,\,s+1}}{\sqrt{C_s\,C_{s+1}}} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\sqrt{L_s\,L_{s+1}}}{L_{s,\,s+1}} = k_{s,\,s+1}\,\vartheta + \left((\vartheta^2)\right) \tag{15}$$

sind. $\left((\vartheta^\alpha)\right)$ bedeutet eine mit der Potenz ϑ^α beginnende Potenzreihe in ϑ, deren Koeffizienten im folgenden unter Umständen noch von μ abhängen können. Wegen Gl. (13) kann man statt Gl. (14) auch

$$(R_s\,C_s\,\omega_0)^{-1} = v_s\,\vartheta + \left((\vartheta^2)\right) \tag{14a}$$

schreiben. Geht man von der Schaltung Bild 4a zu der äquivalenten Bild 4b über, so gilt wegen unserer Annahme über die C_s und Gl. (13) auch für den Kopplungskoeffizienten zweier aufeinanderfolgender Schwingkreise der Schaltung Bild 3 nach der üblichen Definition

$$\frac{M}{\sqrt{L_{(s)}\,L_{(s+1)}}} = k_{s,\,s+1}\,\vartheta + \left((\vartheta^2)\right). \tag{15a}$$

Die eingangs schon erwähnte Kleinheit der Verlustwinkel sowie die Kleinheit der Kopplungskoeffizienten und der Abweichung der Resonanzfrequenzen der Schwingkreise von der mittleren Frequenz ω_0 des Durchlaßbandes ergeben sich also als Folgerung aus unserer Forderung Gl. (9). Es ergibt sich: Bei gleicher „normierter" Frequenzabhängigkeit proportional zu $\frac{1}{g(\mu)}$ des Verstärkungsfaktors V' streben die Verlustwinkel der Schwingkreise, die Kopplungskoeffizienten und die Abweichungen der Resonanzfrequenzen der Kreise von der mittleren Frequenz ω_0 mit ϑ gegen Null.

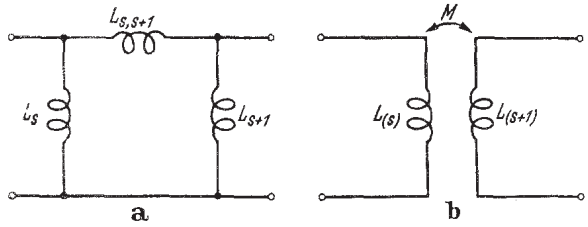

Bild 4.

Die zu lösende erste Aufgabe lautet nunmehr folgendermaßen:

1. Der normierte Frequenzverlauf der Verstärung einer Stufe V' sei durch ein willkürliches Polynom Gl. (9) $g(\Lambda)$ mit reellen Koeffizienten vorgeschrieben.

a) Wie hat man die die Schaltung Bild 1 bestimmenden Elemente C_s, u_s, v_s, $k_{s,\,s+1}$ zu wählen, damit

$$[\vartheta V'(\lambda)]^{-1} = a g(\Lambda) + ((\vartheta)) = a g(\mu) + ((\vartheta)) \tag{9a}$$

wird?

b) Welche Bedingungen müssen die Koeffizienten a_ν von g erfüllen, damit eine brauchbare Lösung möglich ist?

Hierzu müssen die C_s, v_s, $k^2_{s,\,s+1}$ positiv ausfallen. Es zeigt sich, daß die Bestimmungsgleichungen für diese Größen nur $k^2_{s,\,s+1}$ enthalten, so daß nach Belieben bei positivem $k^2_{s,s+1}$ $k_{s,\,s+1}$ selbst positiv oder negativ gewählt werden kann. Im ersten Fall gelangt man nach Gl. (15) zu einer koppelnden Spule $L_{s,\,s+1}$ im zweiten Fall zu einer koppelnden Kapazität $C_{s,\,s+1}$. Es stellt sich heraus, daß die C_s willkürlich positiv vorgeschrieben werden können, was wir verabreden wollen.

Das Polynom $g(\Lambda)$ in Gl. (9a) denken wir schon so bestimmt, daß ein gewünschter technischer Zweck (vorgeschriebenes Amplitudenverhalten, vorgeschriebener Phasenverlauf, vorgeschriebener Einschwingvorgang) erreicht wird. Als Beispiel sei die SCHIENEMANNsche oder TSCHEBYSCHEFFsche Bemessung des Amplitudenganges erwähnt (vgl. S. V. m. v. A.).

Es gibt, wenn überhaupt, dann viele verschiedene Lösungen unserer Aufgabe. Ihnen entspricht ein verschieden großes Maximum von $|V'|$. Wie nachher noch erläutert wird, wird dieses Maximum von $|V'|$ am größten, wenn das Produkt der Beträge aller die Kopplungen bestimmende Zahlen $k_{s,\,s+1}$

$$|k_{12} \cdot k_{23} \cdots k_{m-1,\,m}|$$

möglichst groß wird. Es entsteht also die zweite Aufgabe:

2. Es sollen solche Lösungen der ersten Aufgabe bestimmt werden, für die

$$|k_{12} k_{23} \cdots k_{m-1,\,m}|$$

möglichst groß wird.

3. Ableitung der Bestimmungsgleichungen für die Schaltelemente. Unter Beachtung von Gl. (13), (14) und (15) findet man

$$\left.\begin{aligned} V_s &= -i\,C_s\,\omega_0(2\,i\,\mu + u'_s + i\,v_s)\,\vartheta + ((\vartheta^2)), \\ Y_{s,\,s+1} &= -i\,k_{s,\,s+1}\,\omega_0\sqrt{C_s\,C_{s+1}}\;\vartheta + ((\vartheta^2)). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Die zweite dieser Beziehungen gilt wegen $L_s = \frac{1}{C_s\,\omega_0^2}[1 + ((\vartheta))]$ auch im Fall $Y_{s,\,s+1} = [L_{s,s+1}\,\lambda]^{-1}$. Ferner gilt für die Schaltung Bild 1 (Beweis durch vollständige Induktion)

$$
\begin{aligned}
V'^{-1} = -\frac{1}{S Y_{12} Y_{23} \cdots Y_{m-1,m}} [&Y_1 Y_2 \cdots Y_m + Y_{12}(Y_1 + Y_2) Y_3 \cdots Y_m + \\
&+ Y_{12} Y_3 (Y_2 + Y_3) Y_4 \cdots Y_m + \cdots + Y_1 Y_2 \cdots Y_{m-2} Y_{m-1,m} (Y_1 + Y_m) \\
&+ Y_{12} Y_{23} (Y_1 + Y_2 + Y_3) Y_4 \cdots Y_m + Y_{12} (Y_1 + Y_2) Y_{34} (Y_3 + Y_4) Y_5 \cdots Y_m \\
&+ \cdots + Y_1 Y_2 \cdots Y_{m-3} Y_{m-2,m-1} Y_{m-1,m} (Y_{m-2} + Y_{m-1} + Y_m) \\
&+ Y_{12} Y_{23} Y_{34} (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) Y_5 \cdots Y_m + \cdots + Y_1 Y_2 \cdots Y_{m-4} Y_{m-3,m-2} \\
&\cdot Y_{m-2,m-1} Y_{m-1,m} (Y_{m-3} + Y_{m-2} + Y_{m-1} + Y_m) + \cdots \\
&+ Y_{12} Y_{23} \cdots Y_{m-1,m} (Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_m)] .
\end{aligned} \tag{17}
$$

Nach Gl. (9a) ergibt sich danach mit den Abkürzungen

$$
\begin{aligned}
&2 i \mu + u'_s + i v_s = (s') \\
&a g(\mu) = \frac{i \sqrt{C_1 C_m}\, \omega_0}{S k_{12} k_{23} \cdots k_{m-1,m}} \Big[(1')(2') \cdots (m') + \frac{k_{12}}{\sqrt{C_1 C_2}} \cdot \\
&(C_1(1') + C_2(2'))(3') \cdots (m') + (1') \frac{k_{23}}{\sqrt{C_2 C_3}} (C_2(2') + C_3(3'))(4') \cdots (m') \\
&+ \cdots + (1')(2') \cdots (m-2') \frac{k_{m-1,m}}{\sqrt{C_{m-1} C_m}} C_{m-1}(m-1') + C_m(m')
\end{aligned} \tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{k_{12} k_{23}}{\sqrt{C_1 C_3}} (C_1(1') + C_2(2') + C_3(3'))(4') \cdots (m') + \frac{k_{12}}{\sqrt{C_1 C_2}} (C_1(1') + C_2(2')) \cdot \\
&\cdot \frac{k_{34}}{\sqrt{C_3 C_4}} (C_3(3') + C_4(4'))(5') \cdots (m') + \cdots + (1') \cdots (m-3') \frac{k_{m-2,m-1} k_{m-1,m}}{\sqrt{C_{m-2} C_m}} \\
&\cdot (C_{m-2}(m-2') + C_{m-1}(m-1') + C_m(m')) + \frac{k_{12} k_{23} k_{34}}{\sqrt{C_1 C_4}} (C_1(1') + C_2(2') + C_3(3') + C_4(4')) \\
&\cdot (5') \cdots (m)' + \cdots + (1')(2') \cdots (m-4') \frac{k_{m-3,m-2} k_{m-2,m-1} k_{m-1,m}}{\sqrt{C_{m-3} C_m}} \\
&(C_{m-3}(m-3') + C_{m-2}(m-2') + C_{m-}(m-1') + C_m(m')) + \cdots + \frac{k_{12} k_{23} \cdots k_{m-1,m}}{\sqrt{C^1 C_m}} \\
&(C_1(1') + C_2(2') + \cdots + C_m(m')) \Big] .
\end{aligned} \tag{19}
$$

Der Vergleich der Koeffizienten der höchsten Potenz von μ auf beiden Seiten liefert

$$
a = \frac{2^m i^{m+1} \varkappa}{k_{12} k_{23} \cdots k_{m-1,m}} \quad \text{mit} \quad \varkappa = \omega_0 \frac{\sqrt{C_1 C_m}}{s} . \tag{20}
$$

Man erkennt aus diesem Ausdruck für a unter Vorwegnahme des Ergebnisses, daß g ein HURWITZsches Polynom ist, daß die mit den von uns hier betrachteten Schaltungen näherungsweise realisierbaren Verstärkungsfaktoren mit den eingliedrig gekoppelten Schaltungen in der Phase bis auf ein frequenzunabhängiges Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ übereinstimmen. Mit der Einführung neuer frequenzbestimmender Größen

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u'_1 + k_{12} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \\
u_s &= u'_s + k_{s-1,s} \sqrt{\frac{C_{s-1}}{C_s}} + k_{s,s+1} \sqrt{\frac{C_{s+1}}{C_s}} \quad (s = 2, 3, \ldots, m-1) \\
u_m &= u'_m + k_{m-1,m} \sqrt{\frac{C_{m-1}}{C_m}}
\end{aligned} \tag{21}
$$

und der Abkürzungen

$$
u_s + i v_s = w_s, \quad 2 i \mu + w_s = (s) \tag{22}
$$

geht der in eckige Klammern gesetzte Ausdruck auf der rechten Seite von Gl. (19) in die folgenden einfacheren Ausdrücke über:

$$
\left.\begin{aligned}
\text{für } m = 2 \quad & (1)\,(2) - k_{12}^2 \\
m = 3 \quad & (1)\,(2)\,(3) - k_{12}^2\,(3) - k_{23}^2\,(1) \\
m = 4 \quad & (1)\,(2)\,(3)\,(4) - k_{12}^2\,(3)\,(4) - (1)\,k_{23}^2\,(4) - (1)\,(2)\,k_{34}^2 + k_{12}^2\,k_{34}^2 \\
m = 5 \quad & (1)\,(2)\,(3)\,(4)\,(5) - k_{12}^2\,(3)\,(4)\,(5) - \cdots - (1)\,(2)\,(3)\,k_{45}^2 + \\
& k_{12}^2\,k_{34}^2\,(5) + k_{12}^2\,(3)\,k_{45}^2 + (1)\,k_{23}^2\,k_{45}^2 \\
m = 6 \quad & (1)\,(2)\,(3)\,(4)\,(5)\,(6) - k_{12}^2\,(3)\,(4)\,(5)\,(6) - \cdots - (1)\,(2)\,(3)\,(4)\,k_{56}^2 + \\
& + k_{12}^2\,k_{34}^2\,(5)\,(6) + k_{12}^2\,(3)\,k_{45}^2\,(6) + k_{12}^2\,(3)\,(4)\,k_{56}^2 + \\
& + (1)\,k_{23}^2\,k_{45}^2\,(6) + (1)\,k_{23}^2\,(4)\,k_{56}^2 + (1)\,(2)\,k_{34}^2\,k_{56}^2 - 2!\,k_{12}^2\,k_{34}^2\,k_{65}^2 .
\end{aligned}\right\} \quad (23)
$$

Allgemein hat man statt Gl. (19) wegen Gl. (20) als Zusammenfassung der Bestimmungsgleichungen der Schaltelemente in einer Gleichung

$$
\left.\begin{aligned}
(2i)^m\, g(\mu) = (1)\,(2)\cdots(m)\Bigg[& 1 - \sum \frac{k_{s_1,s_1+1}^2}{(s_1)\,(s_1+1)} + \sum \frac{k_{s_1,s_1+1}^2\,k_{s_2,s_2+1}^2}{(s_1)\,(s_1+1)\,(s_2)\,(s_2+1)} - \\
& - 2! \sum \frac{k_{s_1,s_1+1}^2\,k_{s_2,s_2+1}^2\,k_{s_3,s_3+1}^2}{(s_1)\,(s_1+1)\,(s_2)\,(s_2+1)\,(s_3)\,(s_3+1)} + \cdots (-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(\left[\frac{m}{2}\right]-1\right)! \cdot \\
& \cdot \sum \frac{k_{s_1,s_1+1}^2\,k_{s_2,s_2+1}^2\,k_{s_{\left[\frac{m}{2}\right]},\,s_{\left[\frac{m}{2}\right]}+1}^2}{(s_1)\,(s_1+1)\,(s_2)\,(s_2+1)\cdots\left(s_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right)\left(s_{\left[\frac{m}{2}\right]}+1\right)}\Bigg]
\end{aligned}\right\} \quad (24)
$$

Hierin sind alle Indizes der k in einer Summe voneinander verschieden. Es ist jedesmal über alle möglichen solchen Kombinationen aus den Zahlen 1 bis m zu summieren. $\left[\frac{m}{2}\right]$ bedeutet die größte in $\frac{m}{2}$ enthaltene ganze Zahl.

Die Größen u_s aus Gl. (21) lassen sich folgendermaßen deuten. Die durch

$$\omega_s^2 = \omega_0^2 \left[1 + u_s\,\vartheta + \left((\vartheta^2)\right)\right] \quad (25)$$

bestimmte Kreisfrequenz ω_s ist die Frequenz des s-ten Schwingkreises in Bild 3 oder auch die Frequenz desjenigen Schwingkreises, der aus dem s-ten Schwingkreis in der Schaltung Bild 1 durch die Parallelschaltung der benachbarten Kopplungskapazitäten $C_{s-1,\,s}$, $C_{s,\,s+1}$ oder Induktivitäten $L_{s-1,\,s}$, $L_{s,\,s+1}$. Bei dem ersten bzw. letzten Schwingkreis fällt sinngemäß die Parallelschaltung von $C_{s-1,\,s}$ ($L_{s-1,\,s}$) bzw. $C_{s,\,s+1}$ ($L_{s,\,s+1}$) fort. Man erhält in den beiden angegebenen Deutungen zwar nicht völlig übereinstimmende Werte ω_s. Dies wirkt sich aber nur dahin aus, daß $\left((\vartheta^2)\right)$ in Gl. (25) in beiden Fällen etwas Verschiedenes bedeutet. Die zweite Deutung läßt sich im Sonderfall $m = 2$ auch dahin formulieren, daß die Frequenzen Gl. (25) diejenigen Frequenzen sind, für welche der linksseitige ($s = 1$) und rechtsseitige ($s = 2$) Kurzschlußleitwert des Kopplungsvierpols verschwindet.

Man erkennt aus dem Vorhergehenden, daß es auf eine strenge Äquivalenz zwischen den Schaltungen Bild 1 und Bild 3 nicht ankommt, da doch die Glieder zweiter Ordnung $\left(\left((\vartheta^2)\right)\right)$ in Gl. (25) in die Bestimmungsgleichungen unserer Näherung nicht eingehen. Wenn nur die Kapazitäten und die Verlustwiderstände der Schwingkreise in den Schaltungen Bild 1 und 3 übereinstimmen und die Frequenzen der letzteren Schaltung die Werte Gl. (25) haben, wobei also die Glieder zweiter Ordnung unbestimmt bleiben, gilt

$$V'^{-1} = V'^{-1} + \left((\vartheta^2)\right). \quad (26)$$

Abb. 1 Abb. 3.

Der Koeffizientenvergleich der Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von μ auf beiden Seiten Gl. (24) ergibt nunmehr als Bestimmungsgleichungen für die u_s, v_s, $k_{s,\,s+1}$ und damit für die Schaltelemente

$$
\left.\begin{aligned}
&\mu^{m-1}) \quad \Sigma w_s && = 2\,\mathrm{i}\,a_1\\
&\mu^{m-2}) \quad \Sigma w_{s_1} w_{s_2} - \Sigma k^2_{s,s+1} && = -4\,a_2\\
&\mu^{m-3}) \quad \Sigma w_{s_1} w_{s_2} w_{s_3} - \Sigma k^2_{s,s+1} w_t && = -8\,\mathrm{i}\,a_3\\
&\qquad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots && \\
&\mu^{m-p}) \quad \Sigma w_{s_1} w_{s_2} \dots w_{s_p} - \Sigma k^2_{s,s+1} w_t w_{t_2} \dots w_{t_{p-2}} + \\
&\qquad \Sigma k^2_{s_1,s_1+1} k^2_{s_2,s_2+1} w_{t_1} w_{t_2} \dots w_{t_{p-4}} - + \dots \\
&\qquad + (-1)^p \left(\left[\frac{p}{2}\right] - 1\right)! \, \Sigma k^2_{s,s_1+1} \dots k^2_{s_{\left[\frac{p}{2}\right]}, s_{\left[\frac{p}{2}\right]}+1} \langle w_t\rangle = (2\,\mathrm{i})^p a_p \\
&\mu^0) \quad w_{s_1} w_{s_2} \dots w_{s_m} - \Sigma k^2_{s,s_1+1} w_{t_1} \dots w_{t_{m-2}} + - \dots \\
&\qquad + (-1)^m \left(\left[\frac{m}{2}\right] - 1\right)! \, \Sigma k^2_{s_1,s_1+1} \dots k^2_{s\left[\frac{m}{2}\right]}, s\left[\frac{m}{2}\right]+1 \langle w_t\rangle = (2\,\mathrm{i})^m a_m.
\end{aligned}\right\} \tag{27}
$$

Hierbei sollen sämtliche Indizes in jeder Summe verschieden sein, und es ist über alle Indizeskombinationen aus $(1, 2, \dots, m)$ zu summieren. Die Faktoren $\langle w_t\rangle$ treten nur bei ungeradem p, $\left[\frac{p}{2}\right] = \frac{p-1}{2}$ bzw. m, $\left[\frac{m}{2}\right] = \frac{m-1}{2}$ auf. Für gerades p oder m gilt $\left[\frac{p}{2}\right] = \frac{p}{2}$, $\left[\frac{m}{2}\right] = \frac{m}{2}$.

4. Untersuchung der Fälle m = 2 und m = 3.

Diese Gleichungen werden wir jetzt für $m = 2$ und $m = 3$ lösen. Zunächst der Fall $m = 2$. Hier hat man nach Gl. (27) die Bestimmungsgleichungen

$$
\left.\begin{aligned}
w_1 + w_2 &= 2\,\mathrm{i}\,a_1\\
w_1 w_2 - k^2_{12} &= -4\,a_2
\end{aligned}\right\} \tag{28}
$$

für die Unbekannten $w_1 = u_1 + i\,v_1$, $w_2 = u_2 + i\,v_2$ und k_{12}. Ihre Aufspaltung in Real- und Imaginärteile liefert

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{a)} \quad u_1 + u_2 = 0\\
&\text{b)} \quad v_1 + v_2 = 2\,a_1\\
&\text{c)} \quad u_1 u_2 - v_1 v_2 - k^2_{12} = -4\,a_2\\
&\text{d)} \quad u_1 v_2 + u_2 v_1 = 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{29}
$$

Gl. (29 a) wird befriedigt durch

$$u_1 = -u_2 = u\,.$$

Aus Gl. (29 d) folgt dann entweder

$$\alpha) \quad u = 0$$

oder

$$\beta) \quad v_1 = v_2 = a_1\,,$$

letzteres nach Gl. (29 b). Im Fall α) folgt aus Gl. (29 b)

$$v_2 = 2\,a_1 - v_1 \tag{30}$$

und daher aus Gl. (29 c)

$$k^2_{12} = 4\,a_1 - v_1 v_2 = (v_1 - 2\,\mu_1)\,(v_1 - 2\,\mu_2)\,, \tag{31}$$

wenn

$$g(\mu) = \mu^2 + a_1\,\mu + a_2 = (\mu + \mu_1)\,(\mu + \mu_2) \tag{32}$$

gesetzt wird. Im Fall β) stattdessen erhält man

$$k^2_{12} = 4\,a_2 - a_1^2 - u^2\,. \tag{33}$$

$a_1 > 0$, $a_2 > 0$, also $g(\mu)$ „HURWITZsches Polynom" ist danach notwendig und hinreichend für eine brauchbare Lösung ($v_1 > 0$, $v_2 > 0$, $k^2_{12} > 0$). Hinreichend nach Gl. (31), Fall α), sofern v_1 oder v_2 genügend klein positiv gewählt wird. Der Vergleich von Gl. (31)

und (33) zeigt, daß der erste Fall [α)] den größeren Wert k_{12}^2 liefert, und die Grenzfälle $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ ergeben den gefragten Größtwert von k_{12}^2

$$(k_{12}^2)_{\max} = 4a_2 . \tag{34}$$

Schreibt man $v_1 \geqq v_0$, $v_2 \geqq v_0$ ($v_0 \vartheta > 0$ Mindestverlustwinkel) vor, so tritt nach Gl. (31) und (29b) an Stelle von Gl. (34) die Beziehung

$$(k_{12}^2)_{\max} = 4a_2 - v_0 (2a_1 - v_0) . \tag{34a}$$

Der kleinste im Fall α) mögliche Wert k_{12}^2 wird für $v_1 = v_2 = a_1$ erreicht, nämlich

$$k_{12}^2 = 4a_2 - a_1^2 . \tag{35}$$

Er ist positiv, wenn g komplexe Nullstellen hat, wie z. B. bei TSCHEBYSCHEFFschem oder SCHIENEMANNschem Gesamtverstärkungsverlauf V.

Wir wenden uns jetzt zum **Fall $m = 3$.** Hier gelten nach Gl. (27) die folgenden Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten

$$w_1 = u_1 + \mathrm{i}\, v_1,\ w_2 = u_2 + \mathrm{i}\, v_2,\ w_3 = u_3 + i v_3,\ k_{12} \text{ und } k_{23}:$$

$$\left.\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &= 2\,\mathrm{i}\, a_1 , \\ w_2 w_3 + w_3 w_1 + w_1 w_2 - k_{12}^2 - k_{23}^2 &= -4 a_2 , \\ w_1 w_2 w_3 - k_{12}^2 w_3 - k_{23}^2 w_1 &= -8\,\mathrm{i}\, a_3 . \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Durch Bildung von Real- und Imaginärteil ergibt sich daraus

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\ u_1 + u_2 + u_3 && = 0 , \\ &\text{b)}\ v_1 + v_2 + v_3 && = 2 a_1 , \\ &\text{c)}\ u_2 u_3 + u_3 u_1 + u_1 u_2 - v_2 v_3 - v_3 v_1 - v_1 v_2 - k_{12}^2 - k_{23}^2 && = -4 a_2 , \\ &\text{d)}\ u_2 v_3 + u_3 v_2 + u_3 v_1 + u_1 v_3 + u_1 v_2 + u_2 v_1 && = 0 , \\ &\text{e)}\ u_1 u_2 u_3 - u_1 v_2 v_3 - u_2 v_3 v_1 - u_3 v_1 v_2 - k_{12}^2 u_3 - k_{23}^2 u_1 && = 0 , \\ &\text{f)}\ u_2 u_3 v_1 + u_3 u_1 v_2 + u_1 u_2 v_3 - v_1 v_2 v_3 - k_{12}^2 v_3 - k_{23}^2 v_1 && = -8 a_3 . \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Wir setzen

$$g(\mu) = \mu^3 + a_1 \mu^2 + a_2 \mu + a_3 = (\mu + \mu_1)(\mu + \mu_2)(\mu + \mu_3) . \tag{38}$$

Fall A: $v_1 = v_3$.

a) $v_1 = v_2 = v_3 = \dfrac{2a_1}{3}$ [vgl. Gl. (37b)]

nur möglich, wenn

$$2 a_1^3 - 9 a_1 a_2 + 27 a_3 \equiv (2\mu_1 - \mu_2 - \mu_3)(2\mu_2 - \mu_3 - \mu_1)(2\mu_3 - \mu_1 - \mu_2) = 0 \tag{39}$$

also bei geeigneter Numerierung der μ_s

$$\mu = \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} . \tag{39a}$$

Addiert man zur linken Seite von Gl. (37c) $\dfrac{8 a_1^2}{9}$ und multipliziert dann das Ganze mit $\dfrac{2a_1}{3}$, so ergibt sich die linke Seite von Gl. (37f). Daher ist die Gl. (39) für die Verträglichkeit der Gl. (37c) und (37f) erforderlich. Die Gl. (37d) wird mit der Gl. (37a) gleichwertig. α) $u_2 = u_3$. Nach Gl. (37a) wird $u_2 = -2 u_1$ und nach Gl. (37e), die unter der Voraussetzung a) $u_1 u_2 u_3 - k_{12}^2 u_3 - k_{23}^2 u_1 = 0$ lautet, hat man $k_{12}^2 + k_{23}^2 = -2 u_1^2$, $u_1^2 = -(\mu_2 - \mu_3)^2$.

β) $u_1 \neq u_3 \cdot u_2 = -(u_1 + u_3)$. Hier ergibt die Auflösung von Gl. (37c) und (37e) nach k_{12}^2 und k_{23}^2.

$$k_{12}^2 = \frac{-[(\mu_2 - \mu_3)^2 + \mu_1^2] u_1}{u_1 - u_3} , \quad k_{12}^2 = \frac{[(\mu_2 - \mu_3)^2 + u_3^2] u_3}{u_1 - u_3} \tag{40}$$

u_1 und u_3 sind hierin unabhängig wählbar.

b) $v_2 \neq v_1$.

Hier hat man notwendig $u_2 = 0$.

Allgemein folgt nämlich aus Gl. (37a) und (37d)

$$u_1 = \sigma(v_2 - v_3),\ u_2 = \sigma\,(v_3 - v_1),\ u_3 = \sigma(v_1 - v_2)\,, \tag{41}$$

wenn nicht $v_1 = v_2 = v_3$ ist. Gl. (37a) wird dann durch

$$u_1 = -u_3 = u\,,$$

Gl. (37b) durch

$$v_2 = 2\,(a_1 - v_1) \qquad \text{oder} \qquad v_1 - v_2 = 3\,v_1 - 2\,a_1$$

befriedigt. Die Elimination von u aus den Gl. (37c) und (37f) ergibt

$$\left.\begin{aligned} k_{12}^2 + k_{23}^2 &= \frac{8}{3\,v_1 - 2\,a_1}\,[v_1^3 - 2\,a_1\,v_1^2 - (a_1^2 + a_2)\,v_1 - a_1\,a_2 + a_3] \\ &= \frac{8}{3\,v_1 - 2\,a_1}\,(v_1 - \mu_2 - \mu_3)\,(v_1 - \mu_3 - \mu_1)\,(v_1 - \mu_1 - \mu_2). \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Die Gl. (37e) besagt hier $(k_{12}^2 - k_{23}^2)\,u = 0$.

Ist $\alpha)$ $u \neq 0$, so gilt $k_{12}^2 = k_{23}^2$. Ist $\beta)$ $u = 0$, so sind alle mit Gl. (42) verträglichen positiven k_{12}^2, k_{23}^2 möglich. Für das gesuchte Maximum von $k_{12}^2\,k_{23}^2$ kommt aber wieder nur $k_{12}^2 = k_{23}^2$ in Frage. Man hat endlich nach Gl. (37c) oder (37f)

$$u^2 = \frac{v_1^3 - 2\,a_1 v_1^2 + 4\,a_2\,v_1 - 8\,a_3}{3v_1 - 2\,a_1} = \frac{((v_1))}{3\,v_1 - 2\,(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)} \tag{43}$$

mit der Abkürzung

$$((v_1)) = (v_1 - 2\,\mu_1)\,(v_1 - 2\,\mu_2)\,(v_1 - 2\,\mu_3)\,. \tag{44}$$

v_1 ist hier frei wählbar.

Fall B: $v_1 \neq v_3$.

Hier ergibt die Auflösung von Gl. (37)

$$\left.\begin{aligned} k_{12}^2 &= \frac{1}{v_1 - v_3}\,[((v_1)) - u_1^2\,(3\,v_1^2 - 2\,a_1)]\,, \\ k_{23}^2 &= \frac{1}{v_3 - v_1}\,[((v_3)) - u_3^2\,(3\,v_1 - 2\,a_1)]\,, \\ v_2 &= 2\,a_1 - v_1 - v_3\,. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

v_1 und v_3 sind unabhängig wählbar.

Hier gibt es zwei Unterfälle:

a) $u_1 = u_2 = u_3 = 0$.

b) Gl. (41) $u_1 = \sigma(v_2 - v_3),\ u_2 = \sigma(v_3 - v_1),\ u_3 = \sigma(v_1 - v_2)\,,$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\,(v_1 - v_2)^2\,(v_2 - v_3)^2}\,[(v_1 - v_2)\,(v_2 - v_3)\,(v_3 - v_1)^2 + (v_1 - v_2)\,((v_1)) - (v_2 - v_3)\,((v_3))]\,. \tag{46}$$

Diese Ergebnisse können folgendermaßen gewonnen werden. Unter der Annahme a) sind die Gl. (37a, d, e) erfüllt. Die Auflösung der Gl. (37c, f) nach k_{21}^2, k_{23}^2 liefert dann mit Elimination von v_2 nach Gl. (37b) die behaupteten Beziehungen. Liegt nicht der Fall a) vor, so muß die Determinante des in u_1, u_2, u_3 linearen Gleichungssystems 37a, d, e verschwinden. Das ergibt die Gleichung

$$(v_1 - v_2)\,k_{12}^2 + (v_2 - v_3)\,k_{23}^2 + (v_1 - v_3)\,u_1 u_3 = (v_2 - v_3)\,(v_3 - v_1)\,(v_1 - v_2)\,. \tag{47}$$

Nimmt man hierzu die Gl. (37c, f) und setzt überall für die u_s die Werte Gl. (41) ein, so erhält man ein lineares Gleichungssystem für $k_{12}^2, k_{23}^2, \sigma^2$. Seine Auflösung führt auf die Gl. (45) und (46).

Es folgt nun die Untersuchung der Brauchbarkeit der Lösungen (u_1^2, u_2^2, u_3^2, v_1, v_2, v_3, k_{12}, k_{23}^2 positiv) und der Frage, welche Einschränkungen den a_1, a_2, a_3 oder μ_1, μ_2, μ_3 aufzuerlegen sind, damit brauchbare Lösungen existieren, sowie schließlich der Frage nach einer Lösung mit maximalem Wert $k_{12}^2\ k_{23}^2$. Im Fall $A\,a\,\alpha$ gibt es offenbar keine brauchbare Lösung. Im Fall $A\,a\,\beta$ gibt es keine brauchbare Lösung, wenn außer μ_1, das wir immer als reell annehmen dürfen, auch μ_2 und μ_3 reell sind, da dann entweder k_{12}^2 oder k_{23}^2 negativ ausfallen muß. Sei $\mu_2 = a + i\,b$, $\mu_3 = a - i\,b$, dann wird aus Gl. (40) $k_{12}^2 = \frac{(4\,b^2 - u_1^2)\,u_1}{u_1 - u_3}$, $k_{23}^2 = \frac{(4\,b^2 - u_3^2)\,u_3}{u_3 - u_1}$.

Unter der keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit nach sich ziehenden Voraussetzung $u_1 > u_3$ fallen vorstehende Größen dann und nur dann positiv aus, wenn

$$u_1 < \operatorname{sgn} u_1 \cdot 2\,b,\quad u_3 > \operatorname{sgn} u_3 \cdot 2\,b\,(u_1 > u_3) \tag{48}$$

ist. Wegen Gl. (39a) ist $\mu_1 = a$ und deshalb $v_1 = v_2 = v_3 = 2\,a$. Die Bedingung Gl. (39) und die Bedingung, daß $g(\mu)$ ein HURWITZsches Polynom mit einem Paar komplexer Nullstellen ist, sind also die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 von g, wenn eine brauchbare Lösung vom Typ $A\,a\,\beta$ vorhanden sein soll. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Parameter u_1 und u einer brauchbaren Lösung sind durch Gl. (48) gegeben.

Im Fall $A\,b$ ist notwendig und hinreichend für eine brauchbare Lösung: $g(\mu)$ ist ein HURWITZsches Polynom.

Beweis der Notwendigkeit: 1. μ_2 und μ_3 konjugiert komplex. Hier hat man

$$\frac{u^2}{k_{12}^2 + k_{23}^2} > 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{v_1 - 2\,\mu_1}{v_1 - \mu_2 - \mu_3} > 0$$

a) $v_1 < 2\,\mu_1$, $v_1 < \mu_2 + \mu_3$. Wegen $v_1 > 0$ sind die Realteile von μ_1, μ_2, μ_3 positiv,

b) $v_1 > 2\,\mu_1$, $v_1 > \mu_2 + \mu_3$. Wegen $\frac{v_2}{2} = a_1 - v_1 > 0$ gilt $a_1 > 2\,\mu_1$, $a_1 > \mu_2 + \mu_3$.

Wegen $a_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 > 0$ folgt wieder, daß die Realteile von μ_1, μ_2, μ_3 positiv sind.

2. $\mu_1 > 0$, $\mu_2 < 0$, $\mu_3 < 0$.

Aus $\frac{u^2}{k_{12}^2 + k_{23}^2} > 0$ folgt hier $\frac{v_1 - 2\,\mu_1}{(v_1 - \mu_3 - \mu_1)\,(v_1 - \mu_1 - \mu_2)} > 0$.

Man hat wegen $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = a_1$ und Gl. (37b) $v_1 - 2\,\mu_1 < 0$ und somit $v_1 - \mu_3 - \mu_1 = v_1 - a_1 + \mu_2 < 0$, $v_1 - \mu_1 - \mu_2 = v_1 - a_1 + \mu_3 < 0$ und damit einen Widerspruch.

3. $\mu_1 < 0$, $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$.

Aus $\frac{u^2}{k_{12}^2 + k_{23}^2} > 0$ folgt hier wegen $v_1 - \mu_2 - \mu_3 = v_1 - a_1 + \mu_1 < 0$

$$\frac{(v_1 - 2\,\mu_2)\,(v_1 - 2\,\mu_3)}{(v_1 - \mu_3 - \mu_1)\,(v_1 - \mu_1 - \mu_2)} < 0\,.$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf $\mu_2 > \mu_3$ angenommen werden.

a) $(v_1 - 2\,\mu_2)\,(v_1 - 2\,\mu_3) > 0$.

Hieraus folgt $v_1 < 2\,\mu_3$ [$v_1 > 2\,\mu_2$ nicht möglich, da dies $v_1 > a_1$ nach sich ziehen würde] und

$$(v_1 - \mu_3 - \mu_1)\,(v_1 - \mu_1 - \mu_2) < 0\,.$$

Somit wird

$$\mu_1 + \mu_2 > v_1 > \mu_1 + \mu_3$$

und weiter $3\,v_1 < 2\,(\mu_1 + \mu_1 + \mu_3) = 2\,a_1$, $3\,v_1 - 2\,a_1 < 0$, was einen Widerspruch gegen $k_{12}^2 + k_{23}^2 > 0$ und $u^2 > 0$ ergibt.

b) $(v_1 - 2\,\mu_2)\,(v_1 - 2\,\mu_3) < 0$, also $(v_1 - \mu_3 - \mu_1)\,(v_1 - \mu_1 - \mu_2) > 0$.

Es folgt $2\mu_2 > v_1 > 2\mu_3$ und $v_1 > \mu_1 + \mu_2$ [$v_1 < \mu_3 + \mu_1$ nicht möglich wegen $v_1 > 2\mu_3$] und hieraus $3v_1 > 2(\mu_1 + \mu_1 + \mu_3) = 2a_2$ und damit ein Widerspruch gegen $k_{12}^2 + k_{23}^2 > 0$ und $u^2 > 0$.

Der Fall $\mu_1 < 0$, $\mu_2 < 0$, $\mu < 0$ ist wegen $a_1 > 0$ [vgl. Gl. (37b)] allgemein unzulässig.

Beweis für das Ausreichen der Bedingung, daß $g(\mu)$ ein HURWITZsches Polynom ist [Fall A b]: Für $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$ oder $\mu_1 > 0$, μ_2, μ_3 konjugiert komplex und $\Re^2 \mu_2 > 0$ wird bei hinreichend kleinem v_1 sowohl $a_1 - v_1 > 0$ als auch $k_{12}^2 + k_{23}^2 > 0$ und $u^2 > 0$.

Auch im **Fall B a** ist notwendig und hinreichend für eine brauchbare Lösung: $g(\mu)$ ist ein HURWITZsches Polynom.

Beweis der Notwendigkeit:

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf $v_1 > v_3$ angenommen werden. Der Fall $v_1 < v_3$ ergibt sich durch Vertauschung von Eingang und Ausgang der Schaltung, eine Vertauschung, bei welcher das Verhältnis Eingangsstrom zu Ausgangsleerlaufspannung ungeändert bleibt.

1. μ_2, μ_3 konjugiert komplex oder $\mu_2 < 0$, $\mu_3 < 0$. Das Vorzeichen von k_{12}^2 stimmt dann mit dem von $\frac{v_1 - 2\mu_1}{v_1 - v_3}$, das von k_{23}^2 mit dem von $\frac{v_3 - 2\mu_1}{v_3 - v_1}$ überein. Es folgt $v_3 < 2\mu_1$ und somit $\mu_1 > 0$, ferner $v_1 > 2\mu_1$. Hieraus würde sich ein Widerspruch ergeben, wenn $\Re \mu_2 < 0$ und $\Re \mu_3 < 0$, also $\mu_1 > a_1$ wäre.

2. $\mu_1 < 0$, $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$, also $(v_1 - 2\mu_2)(v_1 - 2\mu_3) > 0$, $(v_3 - 2\mu_2)(v_3 - 2\mu_3) < 0$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf $\mu_2 > \mu_3$ gesetzt werden. Es folgt $v_1 > 2\mu_2$ und $2\mu_2 > v_3 > 2\mu_3$ und hieraus $v_1 + v_3 > 2(\mu_2 + \mu_3) > 2a_1$, was nach Gl. (37b) nicht erlaubt ist.

Beweis für das Ausreichen der Bedingung, daß $g(\mu)$ ein HURWITZsches Polynom ist [Fall B a]: Unter der Annahme $v_1 > v_3$ wähle man $v_1 = \varepsilon > 0$ und $v_3 = 2a_1 - \varepsilon$ mit hinreichend kleinem ε und $a_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$.

Die entsprechende Untersuchung des Falles B b steht noch aus.

Es folgt jetzt eine Untersuchung darüber, welche Lösungen maximales $k_{12}^2\, k_{23}^2$ aufweisen. Es gilt der Satz:

Unter den Voraussetzungen

$$2 \leqq \frac{\mu_1}{a}, \quad \mu_{2,3} = a \pm i\,b, \tag{49}$$

$$\left(2\frac{\mu_1}{a} - 1\right) b^2 > a^2 + \mu_1^2 \tag{50}$$

$$b^2 \geqq a(\mu_1 - a) \tag{51}$$

wird das Maximum von $k_{12}^2\, k_{23}^2$ nur für die Grenzfälle $v_1 = 2a_1$, $v_2 = v_3 = 0$ und $v_1 = v_2 = 0$, $v_3 = 2a_1$ im Fall B a angenommen und hat den Wert

$$k_{12}^2\, k_{23}^2 = \frac{16\, a_3 (a_1 a_2 - a_3)}{a_1^2} = 16\, \frac{\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1^2} = \frac{16(\mu_2 + \mu_3)(\mu_3 + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)\mu_1\mu_2\mu_3}{(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^2}. \tag{52}$$

Der Beweis wird mit Ausschluß des Falles B b geführt. Mit Einschluß des letzten Falles handelt es sich nur um eine Vermutung. Die Ungleichung (49) ist gleichwertig mit

$$2\mu_1 \geqq a_1, \quad a_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3. \tag{49a}$$

Die Voraussetzung Gl. (51) erübrigt sich unter der Gl. (49) erweiternden Voraussetzung

$$2 \leqq \frac{\mu_1}{a} \leqq 3, \tag{49b}$$

ebenso ist die Voraussetzung Gl. (50) überflüssig, wenn statt Gl. (49) sogar Gl. (49c) $\frac{\mu_1}{a} \geqq 3$ gilt.

Die Voraussetzungen Gl. (49b) und (50) sind für die „TSCHEBYSCHEFFschen Parameter"

$$\mu_1 = \mathfrak{Sin}\frac{v}{3}, \quad \mu_{2,3} = \frac{1}{2}\sin\frac{v}{3} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{v}{3}, \quad \mathfrak{Cof}\, v = \frac{1}{c} \tag{53}$$

und die „SCHIENEMANNschen Parameter"

$$\mu_1 = \sqrt[3]{c}\,, \quad \mu_{2,3} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{c} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{c} \tag{54}$$

erfüllt.

Ohne jede über die Eigenschaft eines HURWITZschen Polynoms hinausgehende Voraussetzung über das Polynom

$$g(\mu) = \mu^3 + a_1\mu^2 + a_2\mu + a_3 = (\mu+\mu_1)(\mu+\mu_2)(\mu+\mu_3)$$

liefert Gl. (52) nicht notwendig das Maximum von $k_{12}^2\, k_{23}^2$. U. a. gilt dies nicht für reelle positive μ_1, μ_2, μ_3 (z. B. für den sogenannten „Bauerverstärker" $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$). Hier ist der Wert

$$\frac{4(\mu_2+\mu_3)^2(\mu_3+\mu_1)^2(\mu_1+\mu_2)^2}{(\mu_1+\mu_2+\mu_3)^2}\,, \tag{55}$$

der im Fall Ab nach Gl. (42), $k_{12}^2 = k_{23}^2$, für den Grenzfall $v_1 = v_3 = 0$, $v_2 = 2a_1$ angenommen wird, größer als der Wert Gl. (52).

Aus Gl. (45) ersieht man, daß für $v_1 = 2a_1$, $v_3 = u_1 = u_3 = 0$

$$k_{12}^2 = \frac{4(a_1-\mu_1)(a_1-\mu_2)(a_1-\mu_3)}{a_1}\,, \qquad k_{23}^2 = \frac{4\mu_1\mu_2\mu_3}{a_1}$$

ist, womit die Formeln Gl. (52) im Einklang stehen. Die Determinante in Gl. (52) ist eine der in den „HURWITZschen Bedingungen" auftretenden Determinanten, die also positiv sein muß. Hierdurch erhält man eine Bestätigung dafür, daß es sich bei der Lösung mit der Eigenschaft Gl. (52) um eine brauchbare Lösung handelt.

Es folgt der Beweis des obigen Satzes. Der Fall Aa, in dem nach Gl. (39a) $3\mu_1 = a_1$ gelten muß, ist mit der Voraussetzung Gl. (49a) nicht verträglich. Für den Fall Ab ist unter den Voraussetzungen des Satzes der Wert Gl. (55) der größte in Fall Ab mögliche Wert von $k_{12}^2\, k_{23}^2$.

Die logarithmische Ableitung von Gl. (42) hat nämlich den Wert

$$\frac{d\ln(k_{12}^2+k_{23}^2)}{dv_1} = \frac{1}{v_1-\mu_2-\mu_3} + \frac{1}{v_1-\mu_3-\mu_1} + \frac{1}{v_1-\mu_1-\mu_2} - \frac{1}{v_1-2a_1/3}\,. \tag{56}$$

Dieser Ausdruck ist aber für Gl. (57) $0 = < v_1 < \mu_2+\mu_3 = 2a$ negativ. Wegen Gl. (49) haben dann nämlich die Nenner der beiden mittleren konjugiert komplexen Glieder Gl. (56) negativen Realteil, und das erste negative Glied überwiegt das letzte positive wegen $a_1 > 3a$ oder $\mu_1 > a$. In dem Intervall Gl. (57) nimmt also tatsächlich Gl. (42) für $v_1 = 0$ seinen größten Wert an. Der größtmögliche Wert von $v_1 = v_3$ ist nach Gl. (37b) a_1. Im Grenzfall unserer Voraussetzung Gl. (49) $2\mu_1 = a_1$ wird mit $v_1 = a_1$ nach Gl. (42) für $k_{12}^2 = k_{23}^2$

$$k_{12}^2\, k_{23}^2 = (2\mu_2\mu_3)^2\,, \tag{57}$$

also kleiner als der Wert Gl. (55), wie man unter Beachtung von $\mu_1+\mu_2+\mu_3 = 2(\mu_2+\mu_3)$ und Gl. (55) erkennt. Für $\mu_2+\mu_3 < v_1 = v_3 < a_1$ aber ist die für die Brauchbarkeit der Lösung erforderliche Voraussetzung nicht erfüllt, daß $k_{12}^2 + k_{23}^2$ [vgl. Gl. (42)] und u^2 [vgl. Gl. (43)] zugleich positiv sind. Der damit für den Fall Ab als größtmöglicher nachgewiesene Wert Gl. (55) ist aber kleiner als der behauptete Maximalwert Gl. (52). Der Vergleich ergibt, daß dies dann und nur dann gilt, wenn Gl. (50) erfüllt ist.

Es bleibt übrig zu zeigen, daß der Wert Gl. (52) das Maximum von $k_{12}^2\, k_{23}^2$ im Fall Ba darstellt. Wir betrachten die partielle logarithmische Ableitung von $k_{12}^2\, k_{23}^2$ nach v_1. Nach Gl. (45) hat man

$$\frac{\partial\ln(k_{12}^2\, k_{23}^2)}{\partial v_1} = \frac{1}{v_1-2\mu_1} + \frac{1}{v_1-2\mu_2} + \frac{1}{v_1-2\mu_3} - \frac{2}{v_1-v_3}\,. \tag{58}$$

Wegen $v_1 > 2\mu_1 > 2a$ [vgl. Gl. (49)] ist die Summe der beiden konjugiert komplexen mittleren Glieder positiv. Andererseits ist wegen Gl. (49a) und $v_1+v_3 \leqq 2a_1$, $2(v_1-2\mu_1) \leqq v_1-v_3$.

Daher ist der Ausdruck Gl. (58) positiv und $k_{12}^2\, k_{23}^2$ nimmt bei festem $v_3 < 2\,\mu_1$ seinen größten Wert für den größten mit Gl. (37b) verträglichen Wert

$$v_1 = 2\,a_1 - v_3$$

an. Wir setzen demgemäß

$$v_3 = 2\,a_1 - v_1\,, \tag{59}$$

betrachten danach $k_{12}^2\, k_{23}^2$ als Funktion von v_1 allein und bilden

$$\left.\begin{aligned}\frac{d \ln (k_{12}^2\, k_{23}^2)}{d\, v_1} = {} & \frac{1}{v_1 - 2\,\mu_1} + \frac{1}{v_1 - 2\,\mu_2} + \frac{1}{v_1 - 2\,\mu_3} + \frac{1}{v_1 - 2\,(a_1 - \mu_1)} \\ & + \frac{1}{v_1 - 2\,(a_1 - \mu_2)} + \frac{1}{v_1 - 2\,(a_1 - \mu_3)} - \frac{2}{v_1 - a_1}\,.\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Das erste, vierte und letzte Glied zusammen ergeben

$$2\,(v_1 - a_1) - \left(\frac{1}{v_1^2 - 2\,a_1 v_1 + 4\,\mu_1 (a_1 - \mu_1)} - \frac{1}{v_1^2 - 2\,a_1 v_1 + a_1^2}\right),$$

also unter den hier gültigen Ungleichungen

$$2\,a_1 \geqq v_1 > 2\,\mu_1 \geqq a_1$$

stets etwas Positives oder Null, wobei das letztere nur im Fall $2\,\mu_1 = a_1$ eintritt. Es ist nämlich

$$0 < 4\,\mu_1 (a_1 - \mu_1) \leqq a_1^2$$

und der erste Nenner für $v_1 > 2\,\mu_1$ positiv. Die Summe der übrigen Glieder in dem Ausdruck Gl. (60) verschwindet offenbar für $v_1 = a_1$ und läßt sich in der Form

$$\frac{4\,(v_1 - a_1)\,[v_1^2 - 2\,a_1 v_1 + 4\,(a\,a_1 - a^2 + b^2)]}{[(v_1 - 2\,a)^2 + 4\,b^2]\,\{[v_1 - 2\,(a_1 - a)]^2 + 4\,b^2\}} \tag{60a}$$

schreiben. Für $v_1 = 2\,\mu_1 = 2\,(a_1 - 2\,a)$ wird der letzte Faktor im Zähler

$$4\,b^2 - (a_1 - \mu_1)(3\,\mu_1 - a_1) = 4[b^2 - a\,(\mu_1 - a)]\,,$$

also wegen Gl. (51) nicht negativ. Da er mit v_1 für $v_1 > a_1$ stets wächst, ist also der Ausdruck Gl. (60a) und somit auch der Ausdruck Gl. (60) immer positiv. Für den Grenzfall $v_1 = 2\,\mu_1 = a_1$ verschwindet er, wenn in Gl. (51) das Gleichheitszeichen steht. Man schließt daraus, daß im Fall Ba das Maximum von $k_{12}^2\, k_{23}^2$ tatsächlich für den größtmöglichen Wert von v_1, nämlich für $v_1 = 2\,a_1$ angenommen wird und somit den behaupteten Wert Gl. (52) hat.

Als Ergänzung sollen noch einige weniger vollständige Bemerkungen über den Fall Bb) gemacht werden. Wir machen wieder die die Allgemeinheit nicht einschränkende Voraussetzung $v_1 > v_3$. Für

$$3\,v_1 - 2\,a_1 = 2\,v_1 - v_2 - v_3 \geqq 0$$

und

$$2\,a_1 - 3\,v_3 = v_1 + v_2 - 2\,v_3 \geqq 0$$

oder, was dasselbe ist, für

$$v_2 - v_1 \leqq v_1 - v_3 \geqq v_3 - v_2\,, \tag{61}$$

insbesondere also für

$$v_1 \leqq v_2 \leqq v_3$$

werden nach Gl. (45) k_{12}^2 oder k_{23}^2 oder beide kleiner als im Fall Ba) bei gleichen Werten v_1 und v_3. Hier kann also nicht das Maximum des Falles Ba) erreicht werden. Sei ferner

$$v_3 > v_2\,, \tag{62}$$

so daß $3\,v_1 - 2\,a_1 > 0$ wird, und liege der Fall der TSCHEBYSCHEFFschen Parameter Gl. (53) vor. Dann muß $v_1 > 2\,\mu_1 = a_1$ sein, damit nach Gl. (45) k_{12}^2 positiv ausfällt. Wir wollen die Differenz von $k_{12}^2\, k_{23}^2$ im Fall Bb) und im Fall Ba) mit

$$\frac{\sigma^2\,(v_1 - v_2)\,(v_3 - v_2)\,\delta}{2\,(v_1 - v_3)^2} \tag{63}$$

bezeichnen. Nach Gl. (44), (45) und (47) ergibt sich dann

$$\delta = (3\,v_3 - 2\,a_1)\,((v_1)) + (3\,v_1 - 2\,a_1)\,((v_3)) + (3\,v_1 - 2\,a_1)\cdot(3\,v_3 - 2\,a_1)\,(v_1 - v_3)^2\,. \tag{63a}$$

Der Faktor vor δ in Gl. (63) ist positiv. Wir beweisen für TSCHEBYSCHEFFsche Parameter, daß $\delta < 0$ ist, also auch unter der Voraussetzung Gl. (62) der Fall Bb) kleineres $k_{12}^2\, k_{23}^2$ liefert als der Fall Ba) mit gleichen Werten v_1 und v_3. Für TSCHEBYSCHEFF-Parameter wird

$$((v_1)) = (v_1 - a_1)(v_1^2 - a_1 v_1 + a_1^2 + 3),\quad ((v_3)) = (v_3 - a_1)\cdot(v_3^2 - a_1 v_3 + a_1^2 + 3)$$

und im Fall $v_2 = 0$, also Gl. (59),

$$\delta = -42\,(v_1 - a_1)^2\left[(v_1 - a_1)^2 + \frac{3}{7}\right] < 0\,.$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial\,\delta}{\partial\,v_3} = (3\,v_1 - 2\,a_1)\,[3\,(v_1 - 2\,v_3)^2 + 4\,a_1(v_1 - 2\,v_3) + 2\,a_1^2 + 3]\,. \tag{64}$$

Dieser Ausdruck ist wegen $3\,(2\,a_1^2 + 3) - (2\,a_1)^2 > 0$ beständig positiv. Deshalb muß bei TSCHEBYSCHEFFschen Parametern beständig $\delta < 0$ gelten, sofern Gl. (62) und folglich $v_1 > a_1$ angenommen wird.

Es bleibt der Fall

$$v_2 - v_1 > v_1 - v_3 \quad \text{oder} \quad 3\,v_1 - 2\,a_1 < 0\,, \tag{65}$$

also auch $3\,v_3 - 2\,a_1 < 0$ zu untersuchen. Hier erweist sich zwar der Ausdruck Gl. (63a) für δ immer als positiv. Für den Grenzfall

$$v_3 = 0,\ v_2 = 2\,a_1 - v_1 \tag{66}$$

soll aber gezeigt werden, daß bei TSCHEBYSCHEFFschen Parametern im Fall Bb) sich ein kleinerer Maximalwert von $k_{12}^2\, k_{23}^2$ ergibt als im Fall Ba). Auf Grund der aus Gl. (45) und (47) folgenden allgemeinen Formel

$$k_{12}^2 = \frac{v_2 - v_3}{2\,(v_1 - v_3)\,(v_1 - v_2)^2}\,[(v_2 - v_1)((v_1)) + (3\,v_1 - 2\,a_1)((v_3)) + (v_2 - v_1)(3\,v_1 - 2\,a_1)(v_1 - v_3)^2], \tag{67}$$

aus der die entsprechende Formel für k_{23}^2 durch Vertauschung der Indizes 1 und 3 hervorgeht, erhält man

$$k_{12}^2\, k_{23}^2 = \frac{3\,a_1\,(a_1^2 + 1)\left(\frac{a_1}{2} - v_1\right)}{4\,(a_1 - v_1)\,(2\,a_1 - v_1)}\cdot[4\,v_1^2 - 6\,a_1\,v_1 + 3\,(a_1^2 + 1)]\,. \tag{68}$$

Dieser Ausdruck ist unter Beschränkung auf das Intervall $0 < v_1 < a_1$ $\left(\text{nach Gl. (64) } v_1 < \frac{2\,a_1}{3}\right)$ nur für $0 < v_1 < \frac{a_1}{2}$ positiv. Die logarithmische Ableitung des Ausdruckes Gl. (67) nach v_1 erweist sich in dem letzteren Intervall als beständig negativ. In dem betrachteten Grenzfall Gl. (65) wird also das Maximum von $k_{12}^2\, k_{23}^2$ für $v_1 = v_3 = 0$, $v_2 = 2\,a_1$ angenommen. Es ergibt sich hier der Wert

$$|\,k_{12}^2\, k_{23}^2\,| = \frac{3}{4}\,(a_1^2 + 1)\,,$$

wie übereinstimmend aus den für den Fall Ab angegebenen Formeln gefunden wird. Das Quadrat dieses Wertes ist aber kleiner als das gemäß Gl. (52) behauptete Maximum, für das man im TSCHEBYSCHEFFschen Fall

$$\frac{3}{4}\,(a_1^2 + 3)\,(a_1^2 + 1) \tag{69}$$

erhält.

5. Notwendige Bedingungen für g (A) bei allgemeinem m.

Wir wollen jetzt für allgemeines m zeigen:

Ein mit unserer Forderung Gl. (9) oder (9a) verträgliches reelles Polynom $g(A)$ ist notwendig ein Polynom, dessen Nullstellen in der abgeschlossenen linken λ-Halbebene liegen.

Vermutlich gilt aber etwas allgemeiner, wie für $m = 2$ und für $m = 3$ mit Ausnahme des Falles Bb) bewiesen wurde, daß $g(A)$ sogar ein HURWITZsches Polynom sein muß.

Von der linken Seite in Gl. (9a) weiß man [vgl. den Aufsatz Schwingkreisgekoppelte Verstärker mit vorgeschriebenem Amplitudengang“)], daß sie eine reelle rationale Funktion von λ darstellt, die in der abgeschlossenen rechten Halbebene einschließlich des Punktes $\lambda = \infty$ nicht verschwindet. Die Transformationen

$$\Lambda = \frac{\lambda^2 + \omega_0^2}{b\,\lambda}$$

und

$$\mu = \frac{2\,(\lambda - i\,\omega_0)}{b}$$

führen aber die rechte Halbebene in sich über. Das mit $((\vartheta))$ bezeichnete Glied in Gl. (9a) kann für alle μ mit $|\mu| \leq M, M > 0$ beliebig, kleiner als eine beliebig klein vorgesehene positive Zahl ε gemacht werden, sofern nur ϑ hinreichend klein gewählt wird. Damit würde im Widerspruch stehen, wenn $g(\mu)$ im Innern der rechten μ-Halbebene eine Nullstelle besitzt. Denn die linke Seite ist eine rationale Funktion $\omega(\mu\vartheta)$ von μ mit dem Parameter ϑ mit dem einzigen Pol $\mu = -\frac{i}{\vartheta}$ [vgl. Gl. (7) und (11)] im Endlichen, die in eine für $\vartheta < \frac{1}{M}$ gleichmäßig in μ konvergente Potenzreihe nach ϑ entwickelbar ist. Auf einem in der rechten μ-Halbebene gelegenen Halbkreis über dem Durchmesser mit den Endpunkten $\pm i\mu$ und auf diesem Durchmesser [geschlossener Integrationsweg C] strebt die Funktionenfolge $\frac{1}{\omega}\frac{d\,n}{d\,\mu}$ gleichmäßig mit $\vartheta \to 0$ gegen die Grenzfunktion $\frac{g'(\mu)}{g(\mu)}$. Sollte $g(\mu)$ eine Nullstelle für rein imaginäre μ besitzen, so kann man statt C immer einen hinreichend benachbarten nur in der rechten Halbebene verlaufenden Weg C' wählen, für den die Behauptung richtig ist, M sei so groß gewählt, daß $g(\mu)$ für $|\mu| > M$ keine Nullstellen besitzt. Es folgt dann

$$\lim_{\vartheta \to 0} \int_C \frac{1}{\omega(\mu\vartheta)} \frac{d\,\omega(\mu\vartheta)}{d\,\mu}\,d\mu = 0 = \int_C \frac{g'(\mu)}{g(\mu)}\,d\mu\,. \tag{70}$$

Hieraus folgt nach einem bekannten funktionstheoretischen Satz, daß g im Innern der rechten Halbebene keine Nullstellen besitzen kann.

6. Fehlerabschätzung — Beweis der Bedingung für maximalen Verstärkungsbetrag — Anwendungsbeispiele.

Unsere Methode gestattet bei Berücksichtigung höherer Glieder der Potenzreihenentwicklung nach ϑ eine Abschätzung des gemachten Fehlers. Z. B. erhält man für das Glied $((\vartheta))$ in Gl. (9a) im Fall $m = 2$:

$$\left.\begin{aligned}((\vartheta)) = \frac{i\varkappa}{k_{12}}\Big[&\left((1)(2) - k_{12}^2\right) i + (1')\left(i\,u_2' - i\,k_{12}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} - \mu\right)\\ &+ (2')\left(i\,u_1' - i\,k_{12}\cdot\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} - \mu\right)\Big]\mu\vartheta + \cdots\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Bei der Herleitung dieser Formel wurde angenommen, daß in den Formeln (Gl. 13) und (14a). die Glieder $((\vartheta^2))$ verschwinden. Vermutlich wird der Fehler bei ungeradem m dann besonders klein, wenn ebensoviele induktive wie kapazitive Kopplungen vorhanden sind, also Gl. (8) gilt. Dann ist nämlich die Verstärkung V' nach Gl. (7) von derselben Form wie bei einem m-stufigen mit einfachen Schwingkreisen gekoppelten Verstärker.

Nach Gl. (9a) und (20) hat man allgemein für den Verstärkungsfaktor V eines n-stufigen Verstärkers

$$\vartheta^n V = \frac{1}{a_{(1)}\,a_{(2)} \cdots a_{(n)} \cdot g_1(\Lambda)\,g_2(\Lambda) \ldots {}_3\,g_n(\Lambda)} + ((\vartheta))\,. \tag{72}$$

In dem Polynom Nten Grades $g = g_1 \cdots g_n$, das sich jetzt auf den Gesamtverstärker bezieht, hat der Koeffizient der höchsten Potenz, wie für die g_ν, die den einzelnen Stufen zugeordnet sind,

den Wert 1. Der maximale Verstärkungsbetrag V_m wird somit bei bis auf einen konstanten Faktor vorgeschriebener Form der Frequenzkurve von V am größten, wenn $|a_{(1)} \cdots a_{(n)}|$ am kleinsten wird. Dies ist tatsächlich, wie schon behauptet wurde, der Fall, wenn das Produkt aller $|k_{s,\,s+1}|$ ein Maximum wird. Für TSCHEBYSCHEFFschen Verlauf der Gesamtverstärkung V hat man mit

$$m_1 + m_2 + \cdots m_n = N$$

$$\text{z. B.} \qquad |V|^2 = V_m^2 \cdot \frac{1}{1 + c^2\, T^2(z)}, \quad z = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{b\,\omega}. \tag{73}$$

Die Identifizierung von 1^2 mit $-z^2$ und der Koeffizientenvergleich von Gl. (72) und (73) ergibt, wenn berücksichtigt wird, daß der Koeffizient der höchsten Potenz von $T_N(z)$ den Wert 2^{N-1} besitzt,

$$V_m = \frac{2^{N-1}\, c}{|a_{(1)}\, a_{(2)} \cdots a_{(n)}| \cdot \vartheta\, n}. \tag{74}$$

Setzen wir insbesondere

$$m_1 = m_2 = m_n = 2, \quad N = 2\,n$$

und nehmen der Einfachheit wegen alle den einzelnen Stufen entsprechenden Werte $\varkappa$ als gleich groß an, so ergibt sich mit den maximalen Werten Gl. (34)

$$k_{12}^{(\nu)2} = 4\, a_2^{(\nu)}$$

für die Kopplungszahlen nach Gl. (20)

$$a_{(1)}\, a_{(2)} \cdots a_{(n)} = \frac{(2\,i)^N\, i\, \varkappa^n}{2^n \sqrt{a^{(1)} a_2^{(2)} \ldots a^{(n)}}} = (-1)^n\, 2_i^N \sqrt{2\frac{C}{\sqrt{1 + C^2}}}\, \varkappa^n. \tag{75}$$

Die letzte Gleichung gilt, da $a_2^{(\nu)} = |A_\nu|^2$ ist, wo $A, \overline{A}, \ldots, A_n, \overline{A_n}$ die Nullstellen von $g(A)$ sind, welche im TSCHEBYSCHEFFschen Fall der Bedingung

$$\left(\prod_{\nu=1}^{n} |A_\nu|^2\right) = \frac{1 + c^2}{2^{2N-2}\, c^2} \tag{76}$$

genügen. Somit folgt nach Gl. (74) mit der Bezeichnung

$$\sqrt[N]{V_m} = V_m' \tag{77}$$

für die durchschnittliche „Stufenverstärkung" V_m' das Gesetz

$$\varkappa V_m'\, \vartheta = \sqrt[N]{\frac{c\sqrt{1 + c^2}}{2}}, \tag{78}$$

was sich mit

$$K = \frac{\varkappa}{w_0} = \frac{\sqrt{c_1\, c_2}}{S} \tag{78a}$$

wegen Gl. (1) auch in der Form

$$K V_m'\, b = 2 \sqrt[N]{\frac{c}{2}\sqrt{1 + c^2}} \tag{79}$$

schreiben läßt.

Den Gl. (78) und (78a) liegen die Maximalwerte Gl. (34) zugrunde, die nur im Grenzfall $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ erreicht werden können. Ist $v_0\, \vartheta_0$ der kleinste realisierbare Verlustwinkel, so findet man nach Gl. (31) und (29b) als Maximalwert von $(k_{12}^{(\nu)})^2$

$$(k_{12}^{(\nu)})^2_{\max} = 4\, a_2^{(\nu)} \cdot \beta_\nu, \beta_\nu = 1 - \frac{v_0^{(\nu)}\,(2\, a_1^{(\nu)} - v_0^{(\nu)})}{4\, a_2^{(\nu)}}, \; a_1^{(\nu)} = -(A_\nu + \overline{A}_\nu). \tag{79a}$$

Dann tritt zu den rechten Seiten von Gl. (78 und (78a) der positive Faktor

$$\beta = \sqrt[N]{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n} < 1. \tag{80}$$

hinzu. Wenn überhaupt Realisierbarkeit bestehen soll, darf v_c höchstens gleich $a_1^{(\nu)}$ werden. In diesem Fall erreicht β_ν seinen kleinsten Wert [vgl. Gl. (35)].

Ähnlich erhält man in dem Fall, wo die Gesamtverstärkung V nach SCHIENEMANN bemessen wird [vgl. hierzu „Schwinkreisgekoppelte Verstärker mit vorgeschriebenem Amplitudengang"] und wo an Stelle von Gl. (73) die Beziehung

$$|V|^2 = V_m^2 \cdot \frac{1}{1 + c^2 z^{2n}} \tag{81}$$

und an Stelle von Gl. (76) die Beziehung

$$\prod_{\nu=1}^{n} |\Lambda_\nu|^2 = \frac{1}{c} \tag{82}$$

tritt.

$$2 \varkappa V_m' \vartheta = K V_m' b = \beta \sqrt[N]{c} . \tag{83}$$

Im Fall „gleicher Schwingkreise" [„Bauernverstärker"]

$$g(\Lambda) = (\Lambda - \Lambda_0)^N, \; \Lambda_0 = \frac{-1}{\sqrt[N]{\sqrt[N]{1 + c^2} - 1}},$$

wo an Stelle von Gl. (73) die Beziehung

$$|V|^2 = V_m^2 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{\Lambda_0}\right)^N} \tag{84}$$

und an Stelle von Gl. (76) die Beziehung

$$\prod_{\nu=1}^{n} |\Lambda_\nu|^2 = \Lambda_0^N \tag{85}$$

tritt, ergibt sich in derselben Weise

$$2 \varkappa V_m' \vartheta = K' V_m' b = \beta \sqrt{\sqrt[N]{1 + c^2} - 1} . \tag{86}$$

In dem erwähnten ungünstigsten Fall $v_0^{(\nu)} = a_1^{(\nu)}$ für alle ν nimmt β seinen kleinsten Wert an. Für SCHIENEMANNsche Bemessung erhält man für

$$\left.\begin{aligned} N = 4 \quad & \beta^2 = \cos\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{3\pi}{8}, \; \beta = 0{,}5946 \\ N = 6 \quad & \beta^3 = \cos\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{3\pi}{12} \cdot \cos\frac{5\pi}{12}, \; \beta = 0{,}5621 \\ N = 8 \quad & \beta^4 = \cos\frac{\pi}{16} \cdot \cos\frac{3\pi}{16} \cdot \cos\frac{5\pi}{16} \cdot \cos\frac{7\pi}{16}, \; \beta = 0{,}5450 \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Sehr ähnliche Verhältnisse liegen für kleine c bei TSCHEBYSCHEFFscher Bemessung der Gesamtverstärkung vor.

Wir wollen das Ergebnis Gl. (83) mit dem bei einem SCHIENEMANN-Verstärker gleicher Stufenzahl $n = \frac{N}{2}$ und einfachen Schwingkreisen als Kopplungsschaltungen (vgl. „Schwingkreisgekoppelte Verstärker mit vorgeschriebenem Amplitudengang") vergleichen:

$$2 \varkappa V_m' \vartheta = K^* V_m' b = \sqrt[N]{c}, \; K^* = \frac{C_1 + C_2}{S} . \tag{88}$$

Nimmt man genügend großes n und somit $\sqrt[N]{c} \approx \sqrt[N]{c} \approx 1$ sowie gleiche Röhrenkapazitäten $C_1 = C_2$ in beiden Fällen an, so gewinnt man durch den Übergang zu einer Schaltung, bei der

[1] Bei fester Güte der Annäherung an den Idealfall, d. h. bei festem $c \leqq 1$ erhält man hieraus in der Grenze für unendlich große Stufenzahl $n = \frac{N}{2}$ die Brandbreiten-Relation $K V_m' b = 2$. Diese gilt bemerkenswerterweise auch im Idealfall für die von HAROLD A. WEELER [„Wide-Band Amplifiers for Television", Proc. I. R. E. Nr. 7 (1939) Bd. 27] angegebenen Hochfrequenzverstärkerschaltungen, bei denen die Verstärkungen der einzelnen Stufen bereits konstanten Betrag im Durchlaßband aufweisen, sofern wie hier der Fall von Kopplungsvierpolen betrachtet wird.

jede Kopplungsschaltung aus zwei Schwingkreisen besteht, danach eine Vergrößerung des die Verstärkergüte bezeichnenden Produktes $V'_m\, b$ um den Faktor $2\,\beta$.

Wir behandeln noch als Anwendungsbeispiele die Fälle Tschebyscheffscher Gesamtverstärkung $N = m = 3$, $n = 1$ sowie $N = 5$, $n = 2$, $m_1 = 3$, $m_2 = 2$. Für den ersten dieser Fälle gilt nach Gl. (74)

$$V_m = V'_m = \frac{4\,C}{|a|\,\vartheta}.$$

Nach Gl. (20) ist

$$|a| = \frac{8\,\varkappa}{|k_{12}\,k_{23}|}$$

und nach Gl. (52) hierin

$$k_{12}^2\, k_{23}^2 = \frac{16\, a_3\,(a_1\, a_2 - a_3)}{a_1^2}$$

a_3^2 ist das konstante Glied in $\dfrac{1 + c^2\, T_3^2\,(z)}{16\, c^2}$. Hiernach und nach Gl. (53) wird

$$a_1 = 2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{v}{3}, \qquad a_3 = \frac{1}{4\,c}, \qquad a_1\, a_2 - a_3 = \frac{3}{4}\left(\mathfrak{Sin}\, v - 2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{v}{3}\right); \qquad \mathfrak{Sin}\, v = \frac{1}{c}$$

und somit

$$k_{12}^2\, k_{23}^2 = \frac{3}{4\,c}\left(4\,\mathfrak{Sin}\,\frac{v}{3} + \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\frac{v}{3}}\right)$$

oder für klein c

$$|k_{12}\, k_{23}| \approx \sqrt{3}\cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2\,v^2}}.$$

Man erhält danach das Ergebnis

$$2\,\varkappa\, V'_m\,\vartheta = K\, V'_m\, b \approx \sqrt{3}\cdot \sqrt[3]{\frac{c}{2}}. \tag{89}$$

Dies gilt für einen einstufigen Verstärker mit drei Schwingkreisen. Demgegenüber hat man nach Gl. (78a) für einen einstufigen Verstärker mit zwei Schwingkreisen

$$K\, V'_m\, b = 2\sqrt{\frac{c}{2}\sqrt{1 + c^2}}.$$

Ferner gilt für einen einstufigen Verstärker mit einem Schwingkreis

$$K^*\, V'_m\, b = c.$$

Setzt man wieder $K^* = 2\,K$, so ergibt sich z. B. für $c = 0{,}25$

$$(V'_m\, b)_{m=1} : (V'_m\, b)_{m=2} : (V'_m\, b)_{m=3} = 0{,}125 : 0{,}718 : 0{,}866. \tag{90}$$

Im Fall $N = 5$, $n = 2$, $m_1 = 3$, $m_2 = 2$ hat man

$$V = V_1 \cdot V_2$$

$$V_m = \frac{16\, c}{|a_{(1)}\, a_{(2)}|\,\vartheta^2}$$

und nach Gl. (20)

$$|a_{(1)}| = \frac{8\,\varkappa}{\left(k_{12}^{(1)}\, k_{23}^{(1)}\right)}, \qquad |a_{(2)}| = \frac{4\,\varkappa}{|k_{12}^{(2)}|}.$$

Hierin ist

$$k_{12}^{(1)2}\, k_{23}^{(1)2} = \frac{16\, a_3^{(1)}\left(a_1^{(1)}\, a_2^{(1)} - a_3^{(1)}\right)}{a_1^{(1)2}}, \qquad k_{12}^{(2)2} = 4\, a_2^{(2)}.$$

Es gilt

$$g(\Lambda) = \left(\Lambda^3 + a_1^{(1)}\Lambda^2 + a_2^{(1)}\Lambda + a_3^{(1)}\right)\left(\Lambda^2 + a_1^{(2)}\Lambda + a_2^{(2)}\right). \tag{91}$$

Die Nullstellen von $g(\Lambda)$ sind bei unserer Voraussetzung, daß die Gesamtverstärkung Tschebyscheffschen Verlauf haben soll, durch

$$\Lambda_0 = -\operatorname{Sin}\frac{v}{5}, \quad \Lambda_1 = -\sin\frac{\pi}{10}\operatorname{Sin}\frac{v}{5} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{10}\operatorname{Cof}\frac{v}{5}, \quad \overline{\Lambda 1},$$

$$\Lambda_2 = -\sin\frac{3\pi}{10}\operatorname{Sin}\frac{v}{5} + \mathrm{i}\cos\frac{3\pi}{10}\operatorname{Cof}\frac{v}{5}, \; \overline{\Lambda_2}, \; \operatorname{Sin} v = \frac{1}{2}$$

gegeben. Es gibt zwei Möglichkeiten, diese Nullstellen auf die beiden Faktoren von Gl. (91) zu verteilen. Da für klein c angenähert

$$\operatorname{Sin}\frac{v}{5} \approx \operatorname{Cof}\frac{v}{5} = \frac{1}{2}\sqrt[5]{\frac{2}{c}}$$

gilt, hat man in beiden Fällen

$$|k_{12}^{(2)}| \approx \sqrt[5]{\frac{2}{c}}$$

genauer

$$\alpha) \; a_2^{(2)} = \operatorname{Cof}^2\frac{v}{5} - \sin^2\frac{\pi}{10},$$

$$\beta) \; a_2^{(2)} = \operatorname{Cof}^2\frac{v}{5} - \sin^2\frac{3\pi}{10}.$$

Für $k_{12}^{(1)2}\, k_{23}^{(1)2}$ ergibt sich als erste Möglichkeit

$$\alpha) \; k_{12}^{(1)2}\, k_{23}^{(1)2} = \frac{32\sin\frac{\pi}{10}\left(1+\sin\frac{\pi}{10}\right)}{\left(1+2\sin\frac{\pi}{10}\right)^2}\left(\operatorname{Cof}^2\frac{v}{5} - \sin^2\frac{\pi}{10}\right)\left(2\operatorname{Cof}^2\frac{v}{5} - 1 - \sin\frac{\pi}{10}\right)$$

oder

$$|k_{12}^{(1)}\, k_{23}^{(1)}| \approx \gamma\sqrt[5]{\frac{4}{c^2}}, \quad \gamma = 2\,\frac{2\sqrt{\sin\frac{\pi}{10}\left(1+\sin\frac{\pi}{10}\right)}}{1+2\sin\frac{\pi}{10}}.$$

Für die andere Möglichkeit

$\beta)$ tritt an Stelle von $\frac{\pi}{10}$ im vorigen Ausdruck $\frac{3\pi}{10}$.

Man findet

$$\alpha) \; \gamma = 0{,}7862, \; \beta) \; \gamma = 0{,}9242 = 0{,}9613^2$$

und schließlich im günstigeren Fall $\beta)$ mit der mittleren Stufenverstärkung $V'_m = \sqrt{V_m}$

$$2\varkappa V'_m\,\vartheta = K\,V'_m\,b = 2\sqrt{\frac{c}{2}\cdot|k_{12}^{(1)}\, k_{23}^{(1)}\, k_{12}^{(2)}|} \approx 1{,}9226\cdot\sqrt[5]{\frac{c}{2}}. \tag{92}$$

Ob diese Möglichkeit bei der gewählten Schaltungsart von $N = 5$, $n = 2$, $m_1 = 3$, $m_2 = 2$ schon das wirkliche Maximum für $K\,V'_m\,b$ darstellt, ist allerdings nicht erwiesen, da die hinreichenden Bedingungen, unter denen der Ausdruck Gl. (52) für $m = 3$ als Maximum von $k_{12}^2\, k_{23}^2$ nachgewiesen wurde, zwar im Fall $\alpha)$, nicht aber im Fall $\beta)$ erfüllt sind. Vergleicht man hier ähnlich wie im vorigen Beispiel zweistufige Verstärker, die mit einfachen ($m_1 = m_2 = 1$), mit doppelten ($m_1 = m_2 = 2$) und einmal mit drei, das andere Mal mit zwei Schwingkreisen gekoppelt sind ($m_1 = 3$, $m_2 = 2$), so ergibt sich für kleine c

$$(V'_m\,b)_{m_1=m_2=1} : (V'_m\,b)_{m_1=m_2=2} : (V_m\,b)_{m_1=3,\, m_2=2} = \sqrt{\frac{c}{2}} : 2\cdot\sqrt{\frac{c}{2}} : 2\cdot 0{,}9613\sqrt[5]{\frac{c}{2}}. \tag{93}$$

7. Schaltungen mit Ohmscher Kopplung.

Nimmt man nicht wie immer bisher an, daß die Kopplungen induktiv oder kapazitiv, sondern daß sie rein Ohmisch sind, d. h., daß in der Schaltung Bild 1 die Leitwerte $Y_{s,s+1}$ positive Konstanten sind, die in der Form

$$Y_{s,s+1} = k'_{s,s+1}\,\omega_0\sqrt{C_s C_{s+1}}\,\vartheta + (\!(\vartheta^2)\!) \tag{94}$$

abgesetzt werden können, so ergeben sich mit

$$k_{s,s+1} = i\,k_{s,s+1} \tag{95}$$

dieselben Gl. (19) und (27) wie früher. Jedoch hätte die Einführung neuer frequenzbestimmender Größen u_s nach Gl. (21) keinen Sinn mehr, da die $k_{s,s+1}$ jetzt rein imaginär sind. Wir führen vielmehr sinngemäß statt Gl. (13), (14), (18) und (21)

$$\omega_s^2 = \omega_0^2\,[1 + u_s\,\vartheta + ((\vartheta^2))] \tag{96}$$

$$\delta_s' = v_s'\,\vartheta + ((\vartheta^2)) \tag{97}$$

$$2\,i\,\mu + u_s + i\,v_s' = (s') \tag{98}$$

und

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v_1 + k_{12}'\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \\ v_s &= v_s' + k_{s-1}'\,s\,\sqrt{\frac{C_{s-1}}{C_s}} + k_{s,s+1}'\sqrt{\frac{C_{s+1}}{C_s}} \qquad (s = 2, 3, \cdots, m-1) \\ v_m &= v_m' + k_{m-1}'\,m\,\sqrt{\frac{C_{m-1}}{C_m}} \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

ein. Die ω_s bedeuten die Resonanzfrequenzen und die δ_s' die Verlustwinkel der in der Schaltung Bild 1 querliegenden Zweige mit Leitwerten Y_s, $\delta_s = v_s\,\vartheta$ sind als Verlustwinkel derjenigen Schwingkreise zu deuten, die aus den ursrpünglichen Y_s durch Parallelschaltung der benachbarten Ohmschen Kopplungsleitwerte hervorgehen.

Wir führen die Rechnung für das Beispiel $m = 2$ durch. Hier hat man [vgl. Gl. (19)] mit

$$g(\mu) = \mu^2 + a_1\mu + a_2 \quad \text{konst}\; g(\mu) = (1')\cdot(2') + \frac{k_{12}}{\sqrt{C_1 C_2}}\,(C_1(1') + C_2(2')\,.$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt mit

$$v_1 = v_1' + k_{12}'\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}, \qquad v_2 = v_2' + k_{12}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}, \qquad \omega_1 = u_1 + i\,v_1$$

$$\mu^2)\ \text{konst} = -4, \qquad \mu^1)\ w_1 + w_2 = 2\,i\,a_1, \qquad \mu^0)\ w_1\cdot w_2 - k_{12}^2 = -4\,a_2\,.$$

Durch Auftrennung nach Real- und Imaginärteil findet man

$$\left.\begin{aligned} &u_1 + u_2 = 0,\ u_1 = -u_2 = u\,, \\ &v_1 + v_2 = 2\,a_1\,, \\ &u_1 u_2 - v_1 v_2 + k_{12}^2 = -4\,a_2\,, \\ &u_1 v_2 + u_2 v_1 = 0,\ (v_1 - v_2)\,u = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

Man erhält somit

$$k_{12}'^2 = v_1 v_2 + u^2 - 4\,a_2$$

und entweder

$$v_1 = v_2 = a_1$$

oder

$$u = 0\,,$$

wobei der erste Fall die größeren Werte $k_{12}'^2$ liefert, und zwar wird $k_{12}'^2$ bei festem u am größten für $v_1 = v_2 = a_1$:

$$(k_{12}'^2)_{\max} = a_1^2 + u^2 - 4\,a_2\,.$$

Hinsichtlich u ist kein Maximum vorhanden. Die praktische Grenze für die Wahl der Verstimmungsgröße u liegt in der Grenze der angenäherten Gültigkeit unserer Näherungsformeln bei großen Werten $u_s\vartheta$.

8. Zusammenfassung.

Es wird eine allgemeine Berechnungsmethode der Kopplungsvierpole mit mehreren Schwingkreisen von Hochfrequenzverstärkerschaltungen mit relativ engem Durchlaßband der in Ab-

schnitt 1 näher bezeichneten Art (frequenzsymmetrische „Rundfunksiebschaltungen") angegeben. Die genaue Durchführung der Rechnung erfolgt für zwei- und dreikreisige Kopplungsvierpole. Das Hauptergebnis ist: Man kann jeden frequenzsymmetrischen (durch ein sogenanntes HURWITZsches Polynom gekennzeichneten) Frequenzgang eines nur einkreisige Kopplungsvierpole enthaltenden Verstärkers (vgl. S. V. m. v. A.) nach Betrag und Phase (letzteres bis auf ein konstantes ganzzahliges Vielfaches von $\pi/2$) angenähert auch immer durch eine Verstärkerschaltung mit vorgeschriebener Stufenzahl und mehrkreisigen Kopplungsvierpolen realisieren. Einige Anwendungsbeispiele zeigen den unter Umständen mit mehrkreisig gekoppelten Verstärkern gegenüber einkreisig gekoppelten Verstärkern erzielbaren Vorteil, bei gleicher zugelassener Verstärkungsschwankung im Durchlaßband und gleicher Stufenzahl einen größeren Maximalverstärkungsbetrag zu erreichen. Am Schluß wird ein mit der untersuchten Klasse von Hochfrequenzverstärkern verwandter Verstärkertyp behandelt, bei dem die Kapazitäten oder induktiven Kopplungen durch OHMsche Kopplungen ersetzt sind. In mehreren Punkten wäre eine Ergänzung der in diesem Aufsatz noch mit einigen Lücken versehenen Beweisführung erwünscht.

W. CAUER.